

Quando Erlangen entrò nella storia della geometria

Felix Klein e gli invarianti

Mauro Comoglio

Liceo Classico Massimo d'Azeglio – Torino

Centro PRISTEM Bocconi - Milano





Università di Erlangen

LA STORIA (DELLA MATEMATICA) IN CLASSE: STORIE
DI DONNE E UOMINI, STORIE DI IDEE - VENEZIA 14
APRILE 2018



Felix Klein (1849 – 1925)

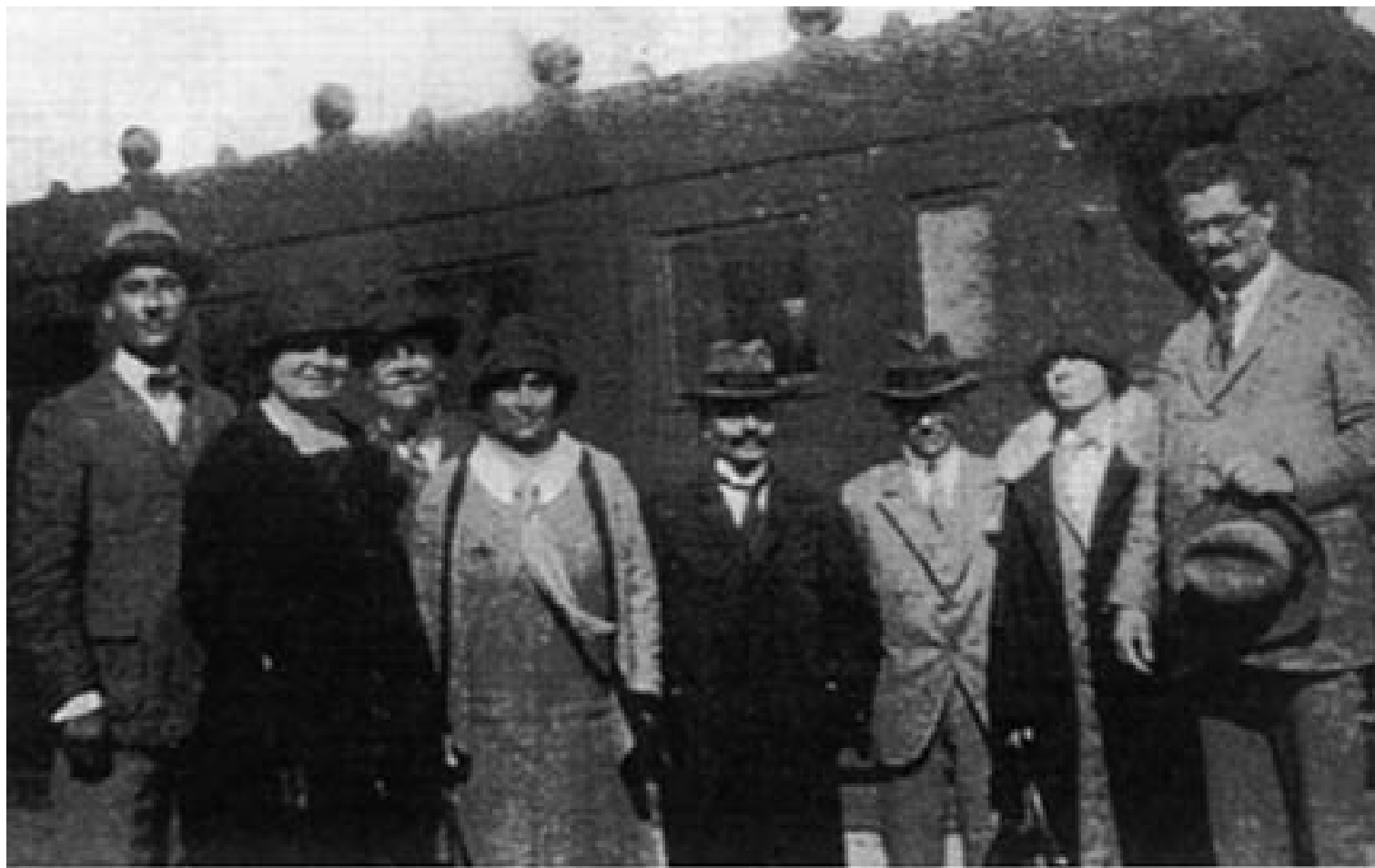


Emmy Noether (1882-1935)

IL PROGRAMMA DI ERLAGEN

*Vergleichende Betrachtungen über
neuere geometrische Forschungen*

*Considerazioni comparative intorno a ricerche
geometriche recenti*



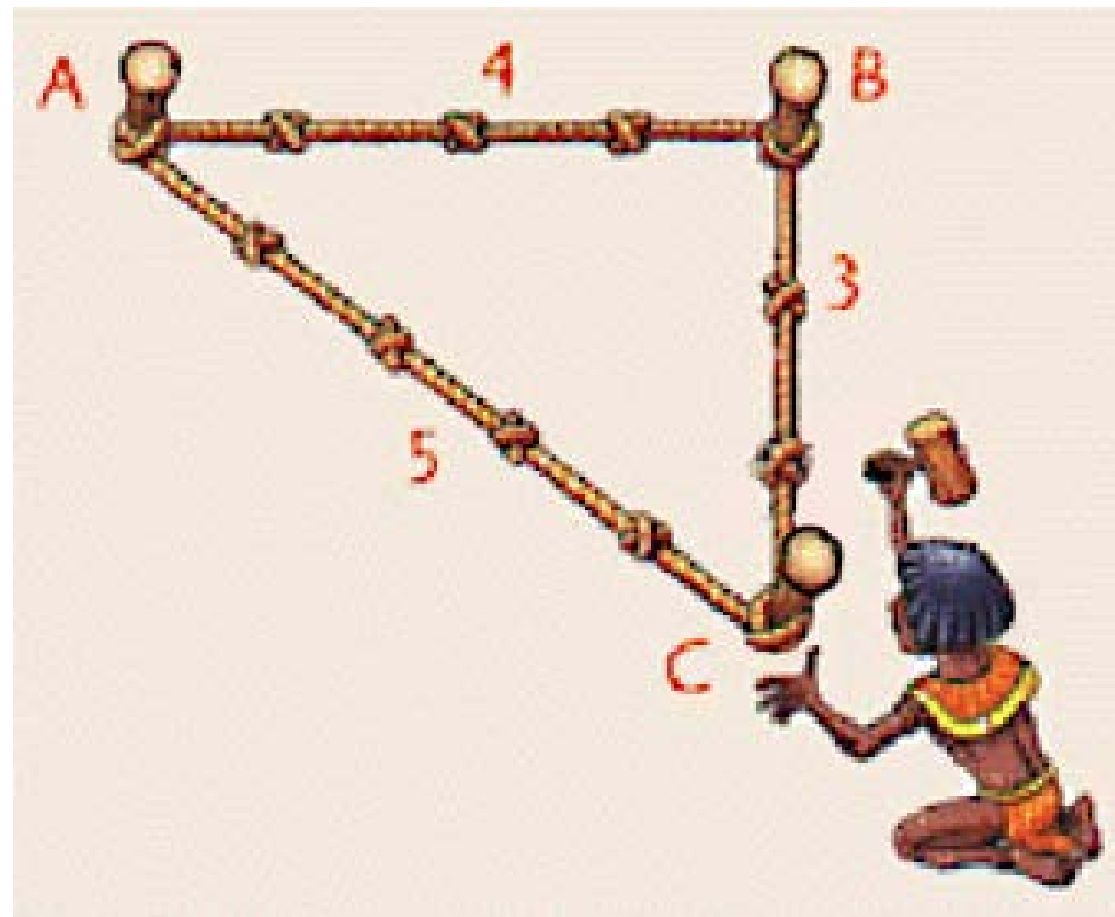
Gino Fano (1871-1952)

LA GEOMETRIA EGIZIA

Dicevano che questo re distribuì il territorio fra tutti gli egiziani, dando a ciascuno un lotto uguale di forma quadrata, e che in base a questa suddivisione si procurava le entrate, avendo imposto il pagamento di un tributo annuo. Se da un podere il fiume asportava una qualche parte, il proprietario, recatosi presso il re, gli segnalava l'accaduto: egli allora mandava funzionari che osservavano e misuravano di quanto il terreno era divenuto più piccolo, affinché per l'avvenire il proprietario pagasse in proporzione il tributo. Io ritengo che in seguito a ciò sia stata inventata la geometria e sia poi passata in Grecia. Erodoto, Le Storie, 440 a.C.

π

Arpedonapti ovvero “annodatori di funi”



Papiro di Ahmes



- ❖ Problema 50
- ❖ Problema 51
- ❖ Problema 52
- ❖ Problema 56



L'area di un campo circolare con un diametro di 9 unità è uguale all'area di un quadrato di lato 8 unità.
 $\pi \cong 3,16$

A. H. Rhind (1833-1863)

LA GRECIA CLASSICA

“Il fior fiore dei contributi del periodo classico sono gli Elementi di Euclide e le Sezioni Coniche di Apollonio [...] Queste opere perfettamente rifinite danno scarse indicazioni sui 300 anni di attività creativa che le precedono o sui problemi che divennero importanti nella storia successiva.

La matematica greca classica si sviluppò in numerosi centri che, si susseguirono l'un l'altro costruendo ciascuno sull'opera dei predecessori. In ogni centro un gruppo informale di studiosi portava avanti le sue attività sotto la guida di uno o più grandi maestri.”

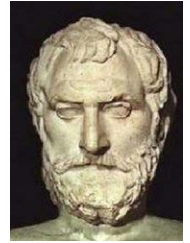
Morris Kline *Storia del Pensiero matematico* pp. 35-68,
Einaudi, Torino 1999

Le scuole

Ionica



Talete di Mileto (VI se-a.C)



Pitagorica



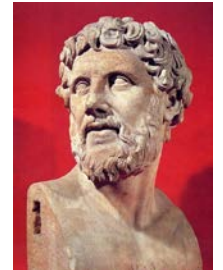
Pitagora di Samo (V se-a.C)



Eleatica



Democrito (IV se-a.C)

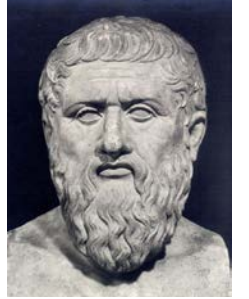


Le scuole

Sofistica



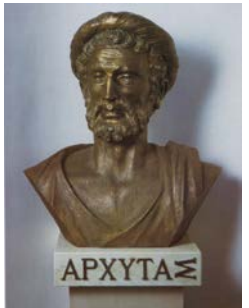
Ippia di Elide (IV se-a.C)



Platonica



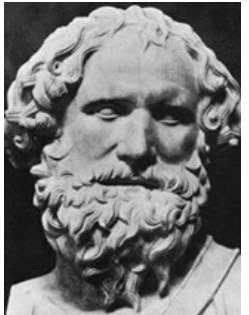
Archita di Taranto (IV se-a.C)



di Eudosso

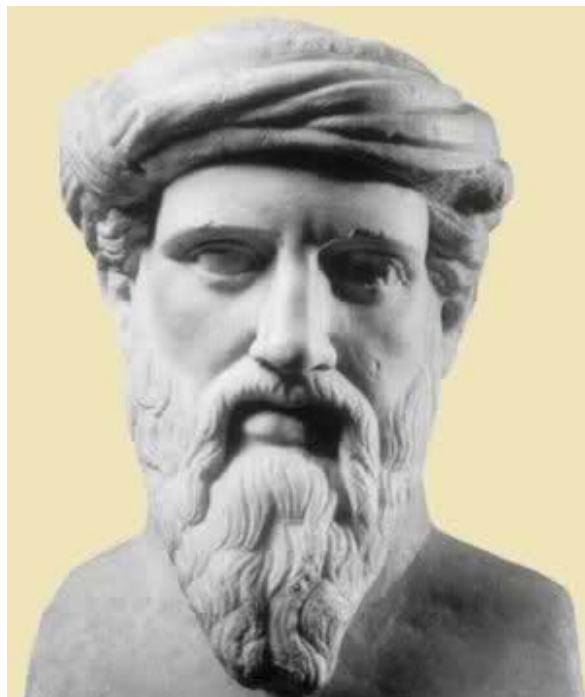


Eudosso di Cnido (IV se-a.C)



π

EUCLIDE, L'ULTIMO DEI CLASSICI?



Euclide di Alessandria (III sec. a.C)



LA STORIA (DELLA MATEMATICA) IN CLASSE: STORIE
DI DONNE E UOMINI, STORIE DI IDEE - VENEZIA 14
APRILE 2018

ΣΤΟΙΧΕΪΑ

Gli Elementi, in particolare, sono tanto una storia della matematica dell'età appena giunta a termine quanto l'elaborazione logica di un argomento.

Morris Kline

Così come è, il trattato euclideo si limita a presentare una sobria esposizione, logicamente strutturata, degli elementi fondamentali della matematica elementare.

Carl B. Boyer

Di fatto, oggi tutta la letteratura greca sugli Elementi pervenutaci, è ridotta alla sola opera euclidea che, per propri meriti intrinseci, finì ben presto per costituire il parametro di riferimento di ogni costruzione logico-deduttiva.

AA. VV.



Gli Elementi



I-VI geometria piana
elementare

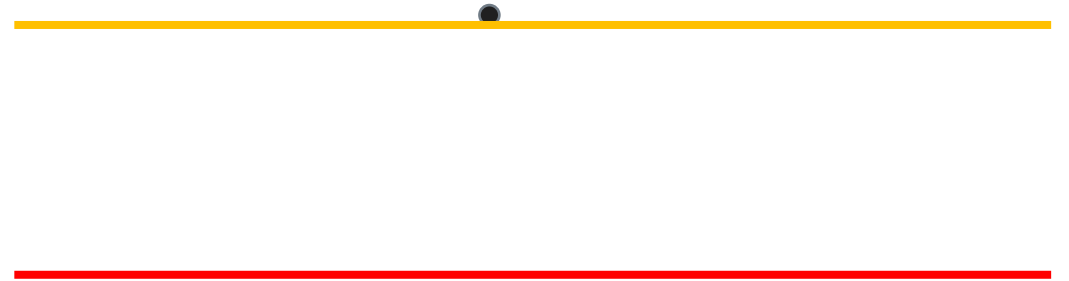
VII-X teoria dei numeri
e incommensurabili

XI-XIII la geometria
solida

π

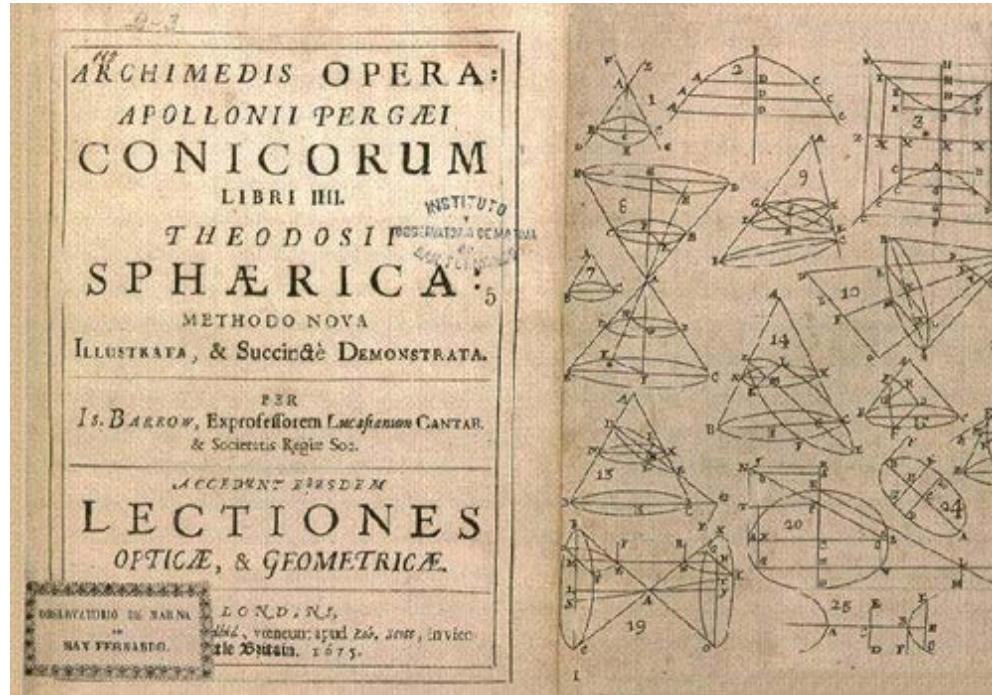


E che se una retta, venendo a cadere, su due rette forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette prolungate indefinitamente, si incontrano dalle parte in cui sono i due angoli minori di due angoli retti.



Assioma di Playfair

IL GRANDE GEOMETRA



Le Coniche sono un'opera classica, che va posta accanto a quelle di Archimede. Lo studio approfondito di essa permise a Cavalieri, a Keplero, a Newton, di aggiungere nuove scoperte a quelle degli antichi. Una parte notevole dei corsi di geometria proiettiva e di geometria analitica delle nostre università, è rivolta pur sempre ad esporre, sia pure sotto nuova forma, le scoperte e gli studi di Apollonio sulle coniche

Giovanni Vacca (1929)

Apollonio di Perga (262-190 a. C.)



<https://www.youtube.com/watch?v=jR-YN3Eh0l0>

<https://www.youtube.com/watch?v=FYFMJBAluH4&feature=youtu.be>

UN MONDO DI FIGURE

Si vedrà che la geometria è pervenuta oggi ad un altissimo livello di generalizzazione, sostituendo alla “contemplazione” delle figure quella degli spazi che la contengono. E’ pur sempre di figure che si trattava alle origini, cioè di oggetti non esistenti nella realtà, ma a cui la realtà poteva far pensare e che poteva aiutare a nominare.

Stella Baruk

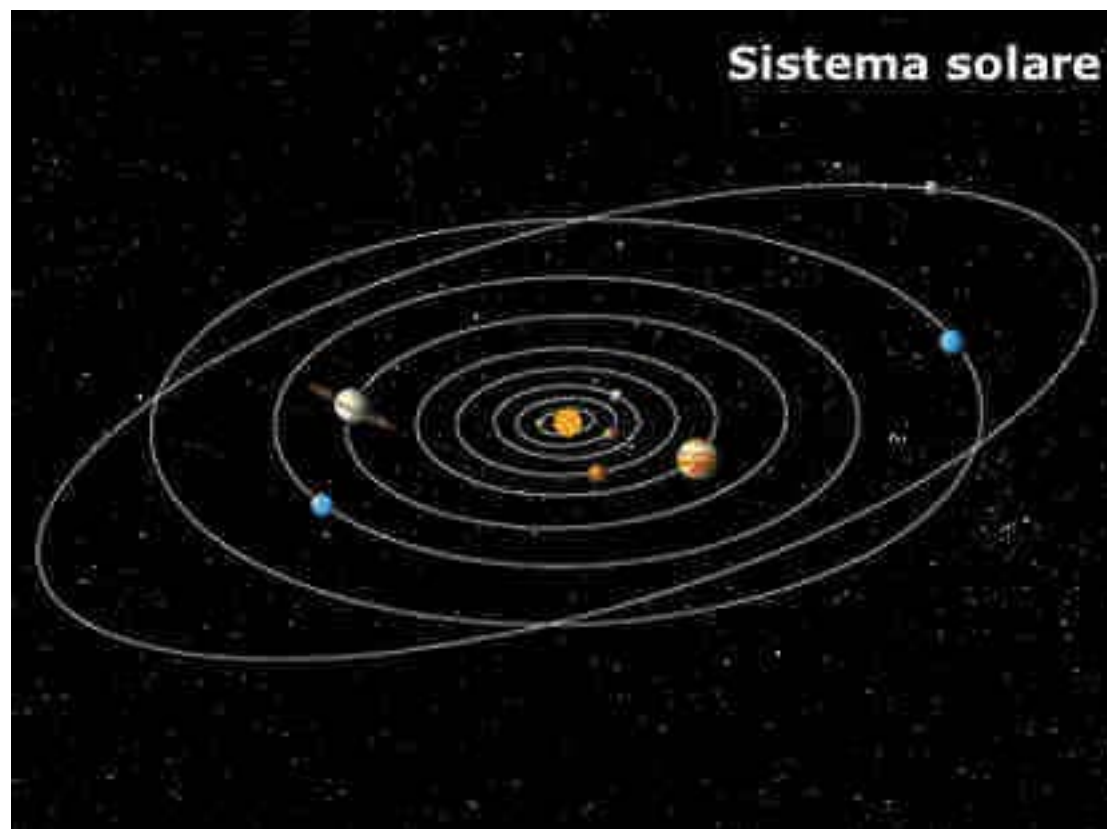
Gonía = ginocchio

Isoskelés = gambe uguali

Toméus = coltello da ciabattino (settore circolare)

Árbelos = trincetto da calzolaio = triangolo di Reuleaux

LA RISCOPERTA DELLE CONICHE



<https://www.youtube.com/watch?v=eLAAFNgpJXg>

LA GEOMETRIA DELLE COORDINATE

Ho deciso di abbandonare la geometria astratta , cioè la considerazione di questioni che servono soltanto a esercitare la mente, e questo allo scopo di studiare un altro tipo di geometria, che ha come oggetto la spiegazione dei fenomeni della natura.

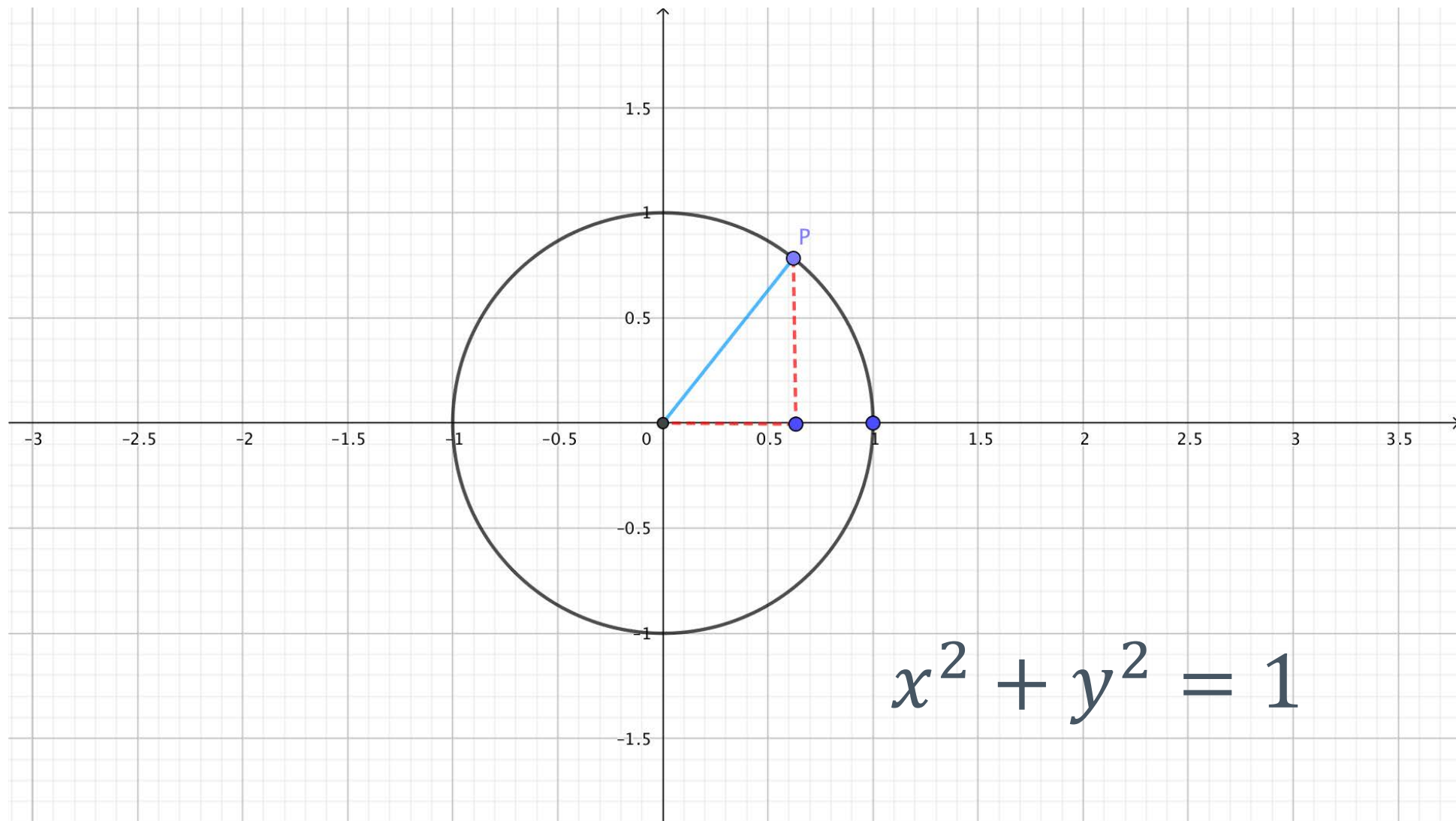
René Descartes

[...] essa può esercitare l'intelletto soltanto a condizione di affaticare grandemente l'immaginazione [...] che ne risultava un'arte piena di confusione calcolata per mettere in imbarazzo invece di una scienza atta a migliorare la mente.



Pierre de Fermat (1607-1665) René Descartes (1596-1650)





RINASCIMENTO GEOMETRICO

Fra tutte le branche della matematica, la geometria è quella che più di ogni altra è andata soggetta ai mutamenti del gusto da un'epoca all'altra. Nella Grecia antica essa aveva raggiunto il suo apice, per poi precipitare nel suo punto più basso al tempo della caduta dell'Impero Romano [...] Nel XVII sec. si presentava alla soglia di una nuova epoca, ma doveva però venire quasi dimenticata, per lo meno dai matematici votati alla ricerca, per quasi altri due secoli, rimanendo in uno stato di torpore [...] Attraverso gli sforzi di Monge e Carnot vi furono reviniscenze di geometria nel periodo della Rivoluzione Francese., ma la riscoperta quasi esplosiva della geometria come branca vitale della matematica venne fatta principalmente agli albori del XIX secolo.

C. Boyer

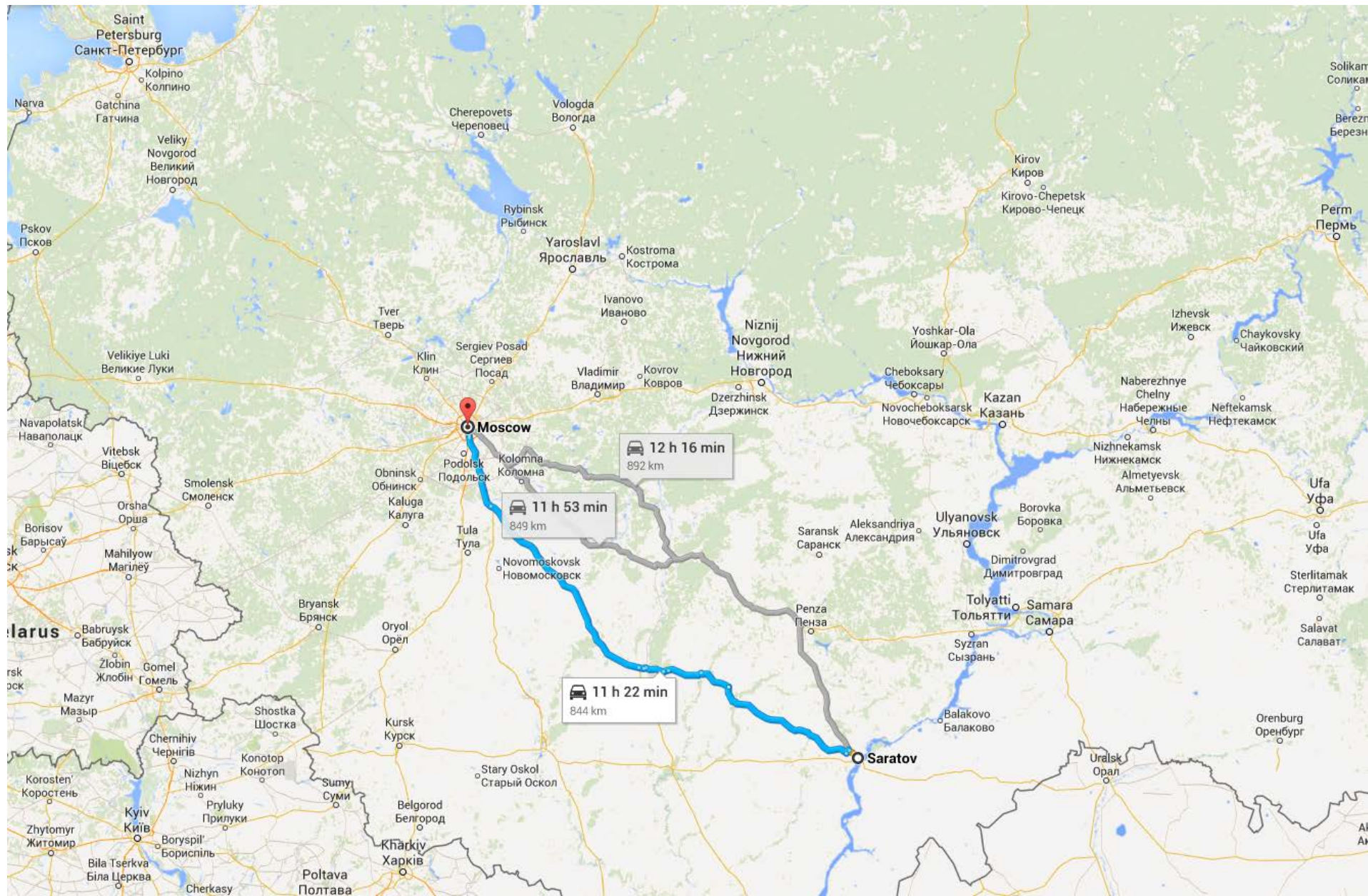


G. Monge (1746-1818)

C. J. Brianchon (1783-1864)



J. V. Poncelet (1788-1867)



LA STORIA (DELLA MATEMATICA) IN CLASSE: STORIE DI DONNE E UOMINI, STORIE DI IDEE - VENEZIA 14 APRILE 2018

La geometria proiettiva studia in particolare le trasformazioni che lasciano invariate le proprietà grafiche delle figure, trasformazioni effettuate mediante un numero finito di proiezioni e sezioni

π

EUCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATUS

EUCLIDES
AB OMNI NAEVO VINDICATUS;
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universae Geometriae Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Mathematicae Professore.
OPUSCULUM
EX.^{MO} SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicitum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum firmij.

Girolamo Saccheri 1733



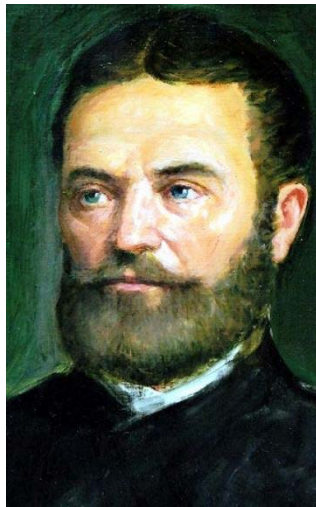
Quanto a me i miei lavori sono già molto avanzati, ma la via sulla quale mi sono messo non conduce al fine che si cerca, e che tu affermi di aver raggiunto, ma conduce piuttosto a mettere in dubbio l'esattezza della geometria.

Lettera di Gauss a Bolyai dicembre 1799



C. F. Gauss (1777-1855)

F. Bolyai (1775-1856)



J. Bolyai (1802-1860)



N. I. Lobačevskij (1792-1856)

FELIX KLEIN IN PILLOLE

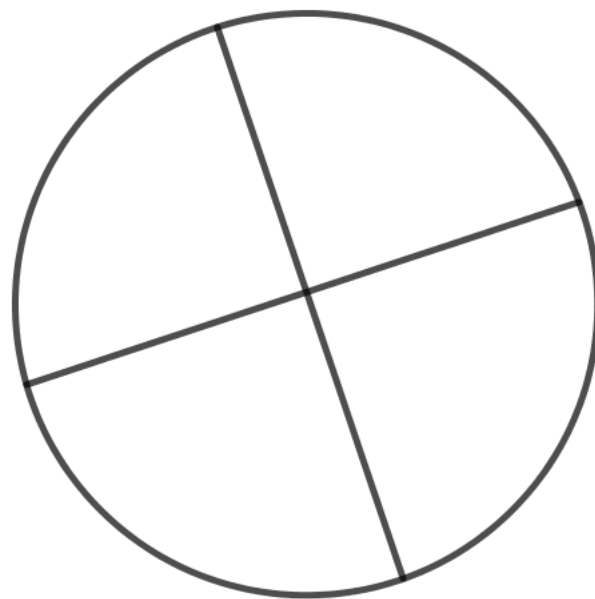
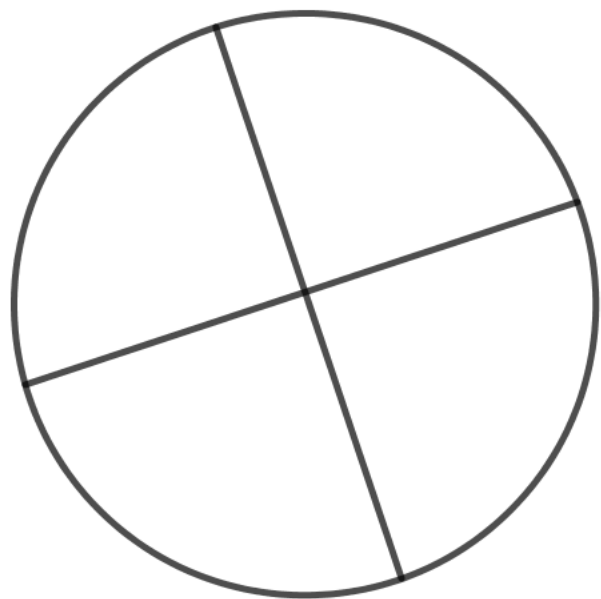
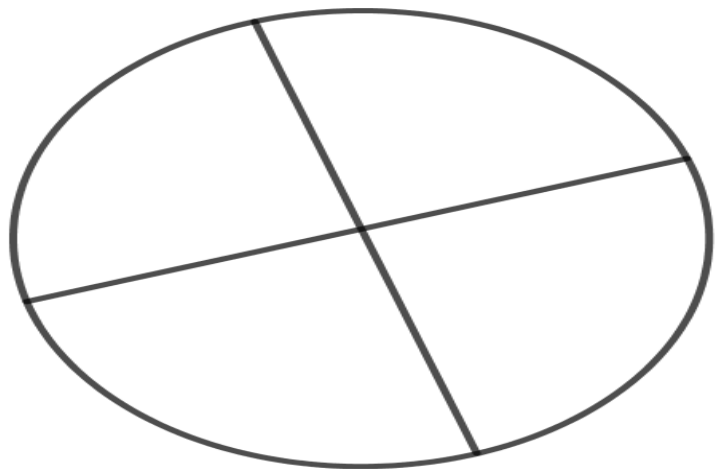
- ✚ Nasce a Düsseldorf il 25 aprile 1849.
- ✚ Compie gli studi universitari tra Bonn e Gottinga.
- ✚ Consegue il *dottorato in filosofia* a Bonn nel 1868.
- ✚ Diviene libero docente a Erlangen dal 1872 al 1875.
- ✚ Insegna a Monaco dal 1875 al 1880.
- ✚ Insegna a Lipsia dal 1880 al 1886.
- ✚ Insegna a Gottinga dal 1886 al 1913.
- ✚ Muore a Gottinga nel 1925.

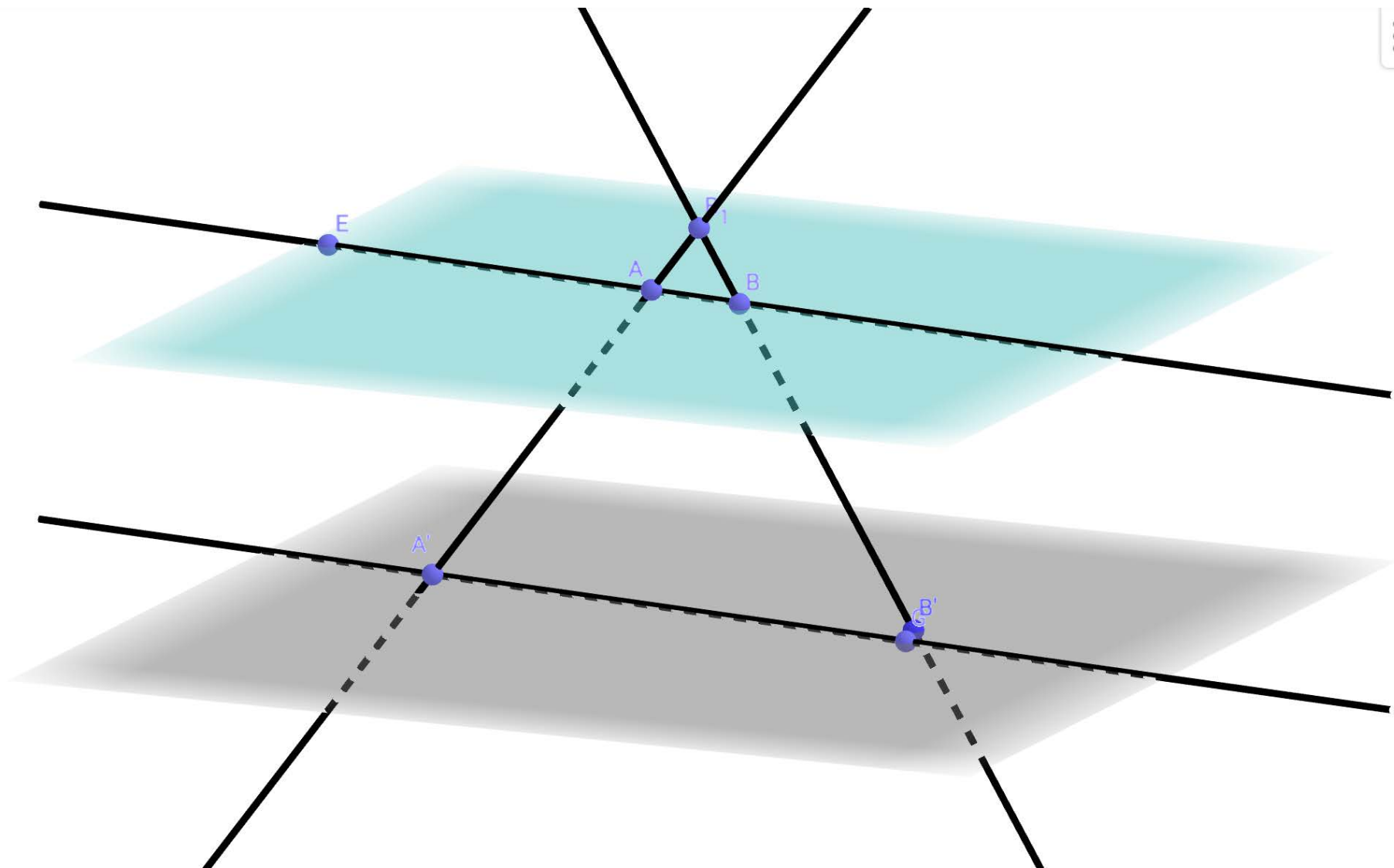
π

UN ALTER EGO PER KLEIN



Marius Sophus Lie (1842-1899)





IL PROGRAMMA DI ERLANGEN

Ciascuna geometria è caratterizzata da un insieme di trasformazioni e l'oggetto della geometria è lo studio delle proprietà invarianti rispetto a questo insieme di trasformazioni

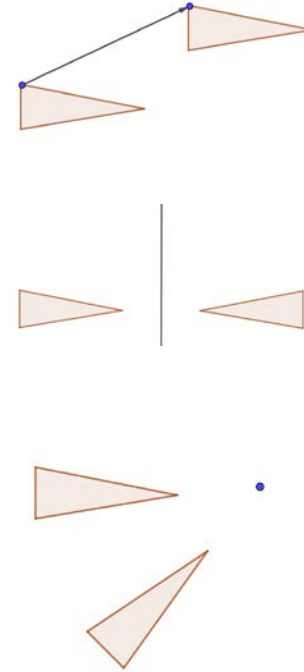


GEOMETRIA EUCLIDEA PIANA

TRASLAZIONI

SIMMETRIE

ROTAZIONI



Le geometrie classificate in base alle proprietà dello spazio che sono invarianti rispetto ad un certo gruppo di trasformazioni.

E' dato un insieme G non vuoto in cui è definita una operazione interna $*$ avente le seguenti proprietà

1. Associativa: per ogni a, b, c appartenenti a G risulta

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

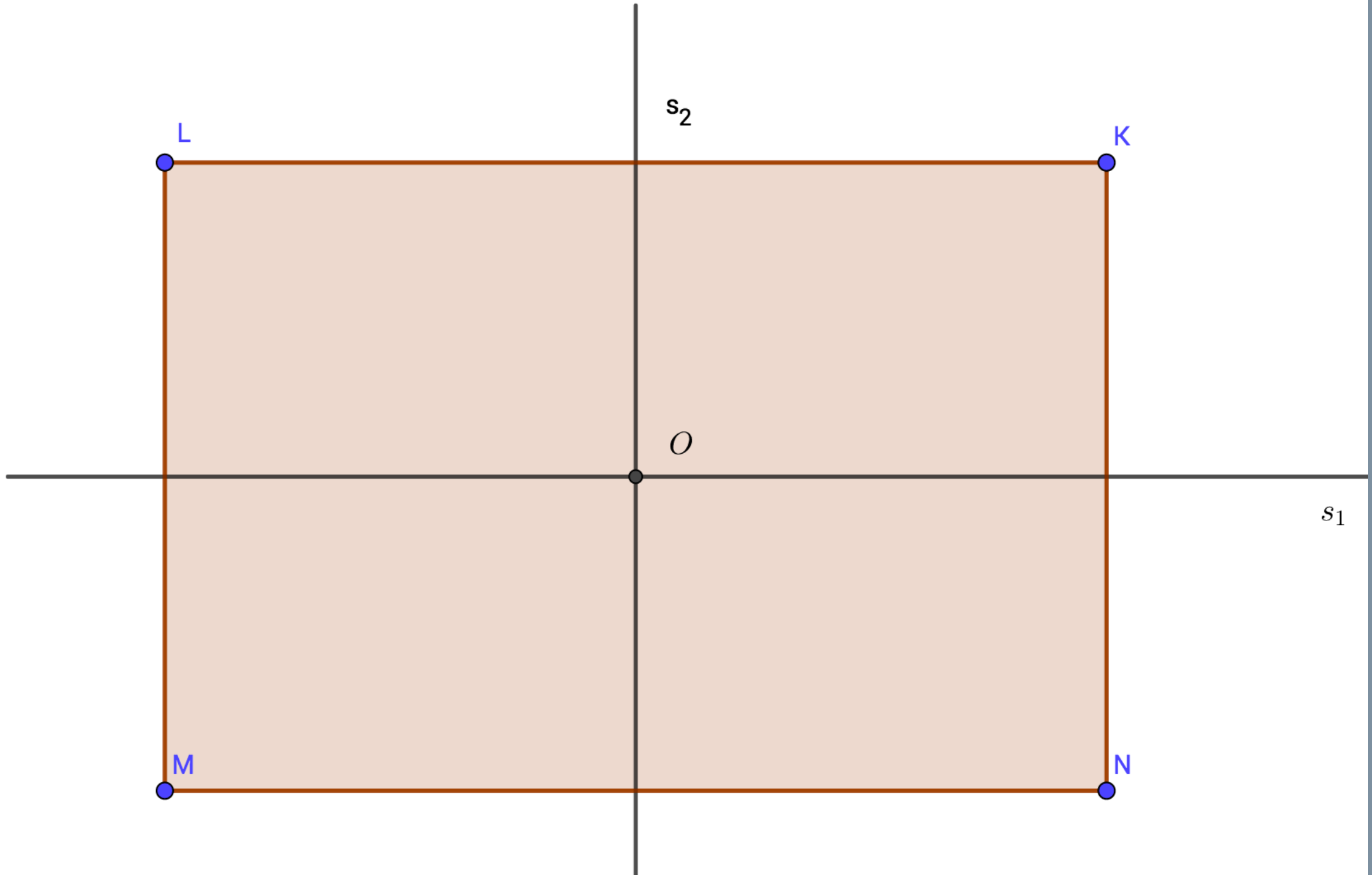
1. E' dotata di elemento neutro u : per ogni a appartenente a G esiste u appartenente a G tale che

$$u * a = a * u = a$$

1. Per ogni a appartenente a G esiste b appartenente a G tale che

$$a * b = b * a = u$$

Esempio: l'insieme degli interi \mathbb{Z} rispetto alla operazione di addizione è un gruppo



Gruppo trirettangolo di Klein

*	I	S ₁	S ₂	O
I	I	S ₁	S ₂	O
S ₁	S ₁	I	O	S ₂
S ₂	S ₂	O	I	S ₁
O	O	S ₂	S ₁	I